非線型関数方程式のApproximation-Solvabilityについて(数値解析の基礎理論研究会報告集)

柴垣, 和三雄; 力丸, 久子

数理解析研究所講究録
72巻 1969年 97-112

非線型関数方程式の Approximation-solvability について

九大 理　柴垣 和三雄
九大 教養　力丸 久子

§1. Approximation-scheme および Approximation-solvability の定義と基本定理 [Browder [1] および Petryshyn [2]]

X, Y : 二つの real or complex Banach space

T : X から Y の中への一般に nonlinear な mapping

に関係する方程式

(1.1) $\quad Tx = f, \quad f \in Y$

を解く問題の可解性 (Solvability) の概念に対し，近似可解性 (Approximation-solvability) の概念を定義し，両者の関係を明らかにしよう.

Def. 1. 与えられた triple (X, Y, T) に対する Approximation-scheme

$$(\{X_n\}, \{Y_n\}, \{P_n\}, \{Q_n\}, \{T_n\} \quad ; n=1,2,\cdots)$$

とは，次の条件を満足する系列の組である.

(a) X_n は X の有限次元の部分空間,

Y_n は Y の有限次元の部分空間,

$$\dim X_n = \dim Y_n$$

(b) P_n は X から X_n の中への continuous mapping で

$$P_n x \longrightarrow x \quad (n\to\infty) \quad \text{in } X \quad , \quad \forall x \in X,$$

(c) Q_n は Y から Y_n の中への continuous mapping で

$$Q_n y \longrightarrow y \quad (n\to\infty) \quad \text{in } Y \quad , \quad \forall y \in Y.$$

(d) $T_n \equiv Q_n T\big|_{X_n}$ は X_n から Y_n の中への continuous mapping で

$x_n \in X_n$, $x_n \longrightarrow x$ in X のとき $T_n x_n \longrightarrow Tx$ in Y

Def. 2. given $f \in Y$ に対し方程式 (1.1) が solvable であるというのは，この関係を満たす元 $x \in X$ が存在することであるが，これが approximation-solvable であるというのは，triple (X, Y, T) に対し一つの Approx.-scheme があり，十分大きなすべての n に対する近似方程式

$$T_n x = Q_n f \tag{1.2}$$

の解 x_n からなる系列 $\{x_n\}$ で，(1.1) の解 x に収束するものが存在することである．特に (1.1) および (1.2) の解が unique なとき，(1.1) は考えた Approx.-scheme に関し uniquely approximation-solvable であるという．

Theorem 1. X, Y は二つの Banach space T は mapping $X \longrightarrow Y$, triple (X, Y, T) に対し Approx.-scheme $(\{X_n\}, \{Y_n\}, \{P_n\}, \{Q_n\}, \{T_n\})$ が存在するとする. mapping T はさらに次の性質をもつとする; $r \geqq 0$ で定義される実数値関数 $\lambda(r)$ で連続狭義単調増加, $\lambda(0)=0$, $\lambda(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ なるものがあり, 十分大きなすべての n に対し

$$(1.3) \qquad \|T_n x - T_n y\| \geqq \lambda(\|x-y\|), \quad \forall x, y \in X_n$$

が成り立つ. すると方程式 (1.1) について次の三つの命題 (A_1), (A_2), (A_3) はたがいに同値であり, また空間 X が reflexive な場合には $(A_1)'$, $(A_2)'$, $(A_3)'$, (C) はたがいに同値である.

(A_1) $f_0 \in Y$ に対して $Tx = f_0$ が solvable,

(A_2) $f_0 \in Y$ に対して $Tx = f_0$ が, 考えた Approx.-scheme に関し uniquely approx.-solvable である.

(A_3) 近似方程式 $T_n x = Q_n f_0$ の (unique な) 解 $x_n \in X_n$ が Cauchy 列をなす.

$(A_1)'$ $\forall f \in Y$ に対して $Tx = f$ が solvable,

$(A_2)'$ $\forall f \in Y$ に対して $Tx = f$ が, 考えた Approx.-scheme に関し uniquely approx.-solvable である.

$(A_3)'$ $\forall f \in Y$ に対して $T_n x = Q_n f$ の (unique な) 解 $x_n \in X_n$ が Cauchy 列をなす.

(C) $x_m \in X_m$ $(m = 1, 2, \cdots)$, $x_m \longrightarrow x$ (weakly) かつ $T_m x_m \longrightarrow g$ ならば $Tx = g$ が成り立つ.

(略証) まず定理の仮定から次ぎの事柄が結論される.

● T_n は X_n から Y_n の上への 1 対 1 両連続な写像である. ($\mathcal{R}(T_n)$ が open in Y_n なることが Brouwer の有限次元空間における領域不変性の定理によっていわれ, 一方仮定から $\mathcal{R}(T_n)$ が closed in Y_n なことが導かれ, $\mathcal{R}(T_n)=Y_n$ がしたがう.) よって $\forall f \in Y$ に対して近似方程式 $T_n x = Q_n f$ はただ一つの解 $x = x_n \in X_n$ をもつ.

● $\|Tx - Ty\| \geqq \lambda(\|x-y\|)$, $x, y \in X$.

したがって方程式 $Tx = f$, $f \in Y$ の解はたかだか一つである.

$(A_1) \Rightarrow (A_2)$. x_0 を $Tx_0 = f_0$ を満たす X の元として, 不等式 (1.3) を用いると

$\|Q_n f_0 - T_n P_n x_0\| = \|T_n x_n - T_n P_n x_0\| \geqq \lambda(\|x_n - P_n x_0\|)$.

$n \to \infty$ にやると $\|x_n - P_n x_0\| \to 0$, $\therefore$ $x_n \to x_0$

$(A_2) \Rightarrow (A_1)$, $(A_2) \Rightarrow (A_3)$ は明らか.

$(A_3) \Rightarrow (A_2)$. $\{x_n\}$ を Cauchy 列とし, $x_n \to x_0 \in X$ とすると, ($T_n x_n = Q_n f_0$ を満たす) $Tx_0 = f_0$ が結論される.

$(A_1)' \Leftrightarrow (A_2)' \Leftrightarrow (A_3)'$ は明らか.

$(A_2)' \Rightarrow (C)$. $x_m \in X_m$, $x_m \to x$ (weakly), $T_m x_m \to g \in Y$ としよう. まず $\|T_m x_m - Q_m g\| \to 0$ $(m \to \infty)$ がいえる. 一方仮定 $(A_2)'$ より上の g に対し $T_m y_m = Q_m g$

の解 y_m は $Ty=g$ の解 y に収束する. 不等式

$$\lambda(\|x_m-y_m\|) \leqq \|T_m x_m - T_m y_m\|$$
$$= \|T_m x_m - Q_m g\| \to 0$$

より $x_m - y_m \to 0$, $\therefore$ $y_m \to x$ (weakly).
よって $y=x$ となり $Tx=g$ が結論される.

$(C) \Longrightarrow (A_2)'$.

冒頭の注意 ● により, $\forall f \in Y$ に対し方程式 $Tx=f$ が解 $x\in X$ をもつこと, および $T_n x_n = Q_n f$ を満たす解 x_n が x に収束することを示せばよい.

不等式 (1.3) により

$$\lambda(\|x_n - 0\|) \leqq \|T_n x_n - T_n(0)\|$$
$$\leqq \|Q_n f\| + \|Q_n T(0)\| .$$

これより $\{x_n\}$ が X において有界なことがでる.

さて X は reflexive なので, $\{x_n\}$ の部分列で

$x_{n_i} \longrightarrow x$ (weakly) なるものがあり, 一方

$T_{n_i} x_{n_i} = Q_{n_i} f \longrightarrow f$ が成り立つので, 仮定 (C) により $Tx=f$, すなわち x が方程式の解なることがわかる.

最後に 不等式 (1.3) により

$$\lambda(\|x_n - P_n x\|) \leqq \|T_n x_n - T_n P_n x\|$$
$$= \|Q_n f - T_n P_n x\| \to 0 .$$

したがって $x_n - P_n x \to 0$, よって $x_n \to x$ が成り立つ.

§2. Approximation-scheme の構成

Def. 3. X : separable Banach space の上の Projection-system

$$(2.1)\qquad (\{X_n\},\ \{P_n\})\qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

とは，次の条件を満足する系列の組である．

$\{X_n\}$: X_n は X の有限次元の部分空間，

$$(2.2)\qquad X_1\subset X_2\subset X_3\subset\cdots\subset X_n\subset\cdots\cdots$$

$$(2.3)\qquad \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}=X,$$

$\{P_n\}$: P_n は X における bounded idempotent linear operator で，Range $P_n=X_n$，すなわち X から X_n の上への projection.

$$(2.4)\qquad n<m \text{ に対して}\qquad P_nP_m=P_mP_n=P_n,$$

$$(2.5)\qquad \|P_n\|\leqq C\ ,\quad C\text{ は正の定数}.$$

Lemma 1. X が Schauder basis $\{e_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$ をもつ Banach space であれば，X の上の projection system が存在する．

(略証) 仮定により，$\forall x\in X$ に対し次式を成り立たせる数列 $\{x^i,\ i=1,2,\cdots\}$ が unique に存在する．

$$(2.6)\qquad \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n} x^ie_i-x\right\|=0$$

$x\in X$ に対して x^i を定める対応を f_i とすると，$f_i(e_j)=\delta_{ij}$ で

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i$$

P_n の定義. $P_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$, $x \in X$.

これより

(1) P_n は linear op. である.

(2) $P_n P_n = P_n$ (idempotent 性)

(3) $P_n x \to x$ in X , $\forall x \in X$

X_n の定義. $X_n = \{ \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \mid x^i$ は数$\}$

これより

(4) $\forall x \in X_n$ に対し $P_n x = x$. よって range $P_n = X_n$.

(5) $X_n \subset X_{n+1}$, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$.

(6) $\dim X_n = n$, 有限次元

(7) $P_n P_m = P_m P_n = P_n$ $(n < m)$

(8) $\|P_n\| \leqq C$

(8)の略証. $x \in X$ に対し $\|x\|' = \sup_{n=1,2,\cdots} \|P_n x\|$ とおくと,

X は $\|\cdot\|'$ に関して Banach space X' となる. いま X' から X

の上への恒等作用素を I とすれば, $\|x\|' \geqq \|x\|$ より

I は linear bounded operator であり, 逆作用素をもつので

$\|x\| \geqq k_1 \|x\|'$ を成り立たせる $k_1 > 0$ がある. よって

$$\|x\| \leqq \|x\|' \leqq k \|x\|$$

が成り立つ. これより

$\|x\| \leqq 1$ であれば $\|x\|' \leqq k$, したがって $\|P_n x\| \leqq k$, $n=1,2,\cdots$

$\therefore$ $\sup_{\|x\| \leqq 1} \|P_n x\| \leqq k$. よって $\|P_n\| \leqq k$.

(9) $f_i \in X^*$, すなわち X の上の linear continuous functional

(10) X は separable である.

(11) $x_k \longrightarrow x$ (weakly in X) であれば

$P_n x_k \longrightarrow P_n x$ in X $(k \to \infty)$.

(11)の(証明) 仮定より $f_i(x_k) \longrightarrow f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots)$

考える n と $\forall \varepsilon > 0$ に対し十分大きな N をとれば,

$k > N$ に対し

$$| f_i(x_k) - f_i(x) | < \frac{\varepsilon}{n} \cdot \frac{1}{C_n} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

ただし $C_n = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \|e_i\|$

が成り立つ. よって

$$\sum_{i=1}^{n} | f_i(x_k) - f_i(x) | \cdot \|e_i\| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \| \sum_{i=1}^{n} f_i(x_k) e_i - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i \| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \| P_n x_k - P_n x \| < \varepsilon, \qquad k > N.$$

(12) A を X から X への demicontinuous operator,

すなわち $x_k \longrightarrow x$ in X $\Rightarrow$ $Ax_k \longrightarrow Ax$ (weakly in X)

を成り立たせるとすれば, (11) により

(i) $P_n A$ は X から X_n の中への continuous mapping.

(ii) $P_n A \big|_{X_n} = A_n$ は X_n から X_n の中への cont. mapping.

(13) 収束 $P_n x \to x$ は X の compact set の上で一様である.

以上の中に lemma 1 の証明が含まれている.

Lemma 2. X が projection system $(\{X_n\}, \{P_n\})$ をもつ reflexive Banach space であれば, X^* の上の projection system $(\{(X^*)_n\}, \{P_n^*\})$ が存在する.

(略証)

P_n^* の定義. P_n の adjoint mapping, すなわち X^* から X^* の中への, 次式を成り立たせる mapping.

$$< P_n^* f, x > = < f, P_n x > \quad , \quad \forall x \in X.$$

$(X^*)_n$ の定義. $(X^*)_n = \text{range } P_n^*$.

(1) P_n^* は linear bounded idempotent operator である.

(2) $P_m^* P_n^* = P_n^* P_m^* = P_n^* \qquad (m > n)$

(3) $(X^*)_1 \subset (X^*)_2 \subset \cdots \subset (X^*)_n \subset (X^*)_{n+1} \subset \cdots$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X^*)_n} = X^*;$$

(4) $(X^*)_n$ は X^* の有限次元部分空間で $\dim (X^*)_n = \dim X_n$.

(5) $\| P_n^* \| \leqq C \qquad\qquad (3)$

(注意) $(X^*)_n$ と $X_n^* = \{X_n$ の上の linear cont. functional の全体$\}$ との関係. $(X^*)_n \cong X_n^*$ が成り立つ.

実際, 次の mapping $E_n : (X^*)_n \longrightarrow X_n^*$ を考えればよい.

$$f \in (X^*)_n \longrightarrow E_n f \in X_n^*$$

$$< E_n f, x > = < f, x > \quad , \quad \forall x \in X_n.$$

以上の結果により 次の二つの Approximation-scheme が構成できる.

Lemma 3. $(\{X_n\}, \{P_n\})$ を separable Banach space X の上の projection system とすれば, $P_n x \to x$, $x \in X$ が成り立つ. さらに X の上の任意の compact set の上で収束は一様である.

(略証) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$ より, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$ に対し 十分大きな n をとれば X_n の元 y で $\|x - y\| < \varepsilon$ を成り立たせるものがある. そこで $\forall m \geqq n$ に対し $y \in X_m$ で

$$\|P_m x - x\| \leqq \|P_m x - P_m y\| + \|P_m y - x\|$$
$$\leqq C\|x - y\| + \|y - x\| \leqq (C+1)\varepsilon.$$

一様の証明は省略する.

I. X が Schauder basis をもつ separable Banach space, T が X から X の中への continuous mapping であれば, Approx.-scheme $(\{X_n\}, \{X_n\}, \{P_n\}, \{P_n\}, \{T_n\})$ が存在する.

II. X が Schauder basis をもつ separable reflexive Banach space, T が X から X^* の中への continuous mapping であれば, Appro.-scheme $(\{X_n\}, \{(X^*)_n\}, \{P_n\}, \{P_n^*\}, \{T_n\})$ が存在する. (Galerkin Approx.-scheme と呼ばれている)

§3. Galerkin Approximation に関する基本定理 [Browder [1]]

Theorem 2. X は separable reflexive Banach space で triple (X, X^*, T) に対し Galerkin Approx.-scheme $(\{X_n\}, \{(X^*)_n\}, \{P_n\}, \{P_n^*\}, \{T_n\})$ が存在するものとする. mapping $T: X \to X^*$ は demicontinuous で, 次の性質を

もつとする. $r \geqq 0$ で定義される実数値関数 $\lambda(r)$ で連続狭義単調増加, $\lambda(0)=0$, $\lambda(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ なるものがあり, 十分大きなすべての n に対し

(3.1) $\quad |<T_n x - T_n y, x-y>| \geqq \lambda(\|x-y\|) \cdot \|x-y\|, \quad {}^\forall x, y \in X_n$

が成り立つ.

そのときは ${}^\forall f \in X^*$ に対して方程式 $Tx=f$ は考えた scheme に関して uniquely approximation solvable である.

(略証) (3.1) は T: demicontinuous の仮定のもとで不等式

(3.2) $\quad |<Tx - Ty, x-y>| \geqq \lambda(\|x-y\|) \cdot \|x-y\|, \quad {}^\forall x, y \in X$

が成り立つことと同値である.

実際, $x, y \in X$ として (3.1) より

$$|<T_n P_n x - T_n P_n y, P_n x - P_n y>| \geqq \lambda(\|P_n x - P_n y\|) \cdot \|P_n x - P_n y\|,$$

これは $T_n = P_n^* T|_{X_n}$ の意味から

$$|<T P_n x - T P_n y, P_n x - P_n y>| \geqq \lambda(\|P_n x - P_n y\|) \cdot \|P_n x - P_n y\|.$$

$n \to \infty$ にやると $TP_n x - TP_n y \rightharpoonup Tx - Ty$ (weakly), $P_n x - P_n y \to x-y$ により, (3.2) が出る. 逆に (3.2) において特に $x, y \in X_n$ とし, $x = P_n x$, $y = P_n y$ に注意すれば (3.1) がしたがう.

(3.1) より §1 の基本定理の仮定

(3.3) $\quad \|T_n x - T_n y\| \geqq \lambda(\|x-y\|), \quad {}^\forall x, y \in X_n$

がしたがうことを注意する.

//

一方 T: demicontinuous で不等式 (3.2) を満たすことから, set $T(X)$ が open in X^* なることが証明される (F.E. Browder [3]). また $T(X)$ が closed in X^* も結論されるので, $T(X)=X^*$, したがって方程式 $Tx=f$ は $\forall f\in X^*$ に対して solvable である.

以上により, §1 の基本定理により方程式 $Tx=f$ は $\forall f\in X^*$ に対して uniquely approximation solvable である.

(注意) X が Schauder basis $\{e_i\}$ をもち, $\forall x\in X$ が

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, e_i \qquad , \qquad f_i(e_j)=\delta_{ij}$$

と表わされる場合, X_n , P_n を §2 のように定義すれば, 方程式 $Tx=f$, $f\in X^*$ に対する通常の Galerkin 解法は, x の近似 x_n を

(3.4) $$x_n=\sum_{i=1}^{n} c_n^i\, e_i \qquad (\ c_n^i \text{ は未定定数}\ )$$

の形により, c_n^i を次の条件で定めるものである.

(3.5) $$< Tx_n-f\,,\ e_i > =0 \quad , \quad (\ i=1,\cdots,n\ )$$

これは一般に未知数 c_n^i に対する nonlinear な代数方程式で, 近似 operational equation

$$T_n x_n - P_n^* f = 0$$

と同値である. X が特に Hilbert 空間の場合には, (3.5) は

(3.6) $$(\ Tx_n-f\,,\ e_i\ ) = 0 \ , \quad (\ i=1,\cdots,n\ )$$

・形になる。

Theorem 2 から以下の系が直ちにしたがう

Corollary 1. H を complex separable Hilbert space $T: H \to H$ を continuous かつ complex monotone, すなわち ある constant $c>0$ があって,

(3.7) $$|(Tx-Ty,\ x-y)| \geqq c\,\|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in H$$

を成り立たせれば, 方程式 $Tx=f$, $f \in H$ は Projection system $(\{H_n\}, \{P_n\})$ に関し uniquely approx. solvable である

(Petryshyn [4], 彼の言葉では PS-solvable, すなわち Projectionally and strongly solvable である)

Corollary 2. 系1において $T: H \to H$ を continuous かつ strongly monotone, すなわち ある constant $c>0$ があって

(3.8) $$\mathrm{Re}\,(Tx-Ty,\ x-y) \geqq c\,\|x-y\|^2 \qquad \forall x, y \in H$$

を満たすとすれば, 方程式 $Tx=f$, $f \in H$ は PS-solvable である. (Minty [5])

文献

[1] Browder, F. E., Approximation-Solvability of Nonlinear Functional Equations in Normed Linear Spaces, Arch. Rational Mech. Anal. 26 (1967), 33−42.

[2] Petryshyn, W. V., Remarks on the Approximation-Solva-

bility of Nonlinear Functional Equations. Arch. Rational Mech. Analy. 26 (1967), 43-49.

[3] Browder, F. E., Remarks on nonlinear functional equations, III. Illinois Jour. Math. 9 (1965), 617-622.

[4] Petryshyn, W. V., Projection methods in nonlinear numerical functional analysis. Jour. Math. and Mech. 17 (1967), 353-372.

[5] Minty, G. J., Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J., 29 (1962), 344-346.

[6] Zarantonello, E., The closure of the numerical range contains the spectrum. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 781-787.

[追記] 上記以外の関連した Browder-Petryshyn およびその他の文献が [1] に載せられている. Petryshyn の projection methods に関連した文献は, [4] に精しい. また Browder は彼の Approximation-Solvability と同様なアイデアがフランスの Aubin によって展開され, 非線型楕円型方程式の定差法による近似解法に適用されたことを注意している. Aubin の論文は

[6] Aubin, Jean-Pierre, Approximation des espaces

de distributions et des opérateurs différentiels, Bull. Soc. math. France, Mémoire 12 (1967), pp. 139.

この論文には Browder-Petryshyn とは別系統の文献が数多く引用されていて，彼の thèse をなしている．